Mathematica *dinosaurorum*

Polynômes du second degré

Polynômes du second degré

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Fonction polynôme du second degré

On dit qu'une fonction P, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est une fonction polynôme du second degré s'il existe un réel a non nul ainsi que deux réels b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On convient alors de dire que $ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.

Remarque. – Cette définition n'entraîne évidemment pas qu'une fonction polynôme de degré 2 donnée ne puisse pas s'écrire sous une forme différente. Par exemple :

• Cas de $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(x-2)$.

• Cas de $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}.$$

• Cas de $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2x + 5$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \left((x-1)^2\right) + 4$.

1.2. Écriture unique

Il existe cependant un certaine unicité de l'écriture d'un polynôme de degré 2, qui concerne plus précisément ses *coefficients* a, b et c.

Théorème 1
Soit $(a, a') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $(b, b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *et* $(c, c') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c',$$

alors $a = a'$, $b = b'$ *et* $c = c'$.

Démonstration

L'égalité entre les deux expressions étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle l'est en particulier pour $x = 0$. On en déduit que $c = c'$ et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx = a'x^2 + b'x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(ax+b) = x(a'x+b'),$$

Soit, en simplifiant par $x \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ ax + b = a'x + b'.$$

En donnant alors successivement à x les valeurs 1 et 2, on obtient :

$$\begin{cases} (a-a') + (b-b') = 0 \\ 2(a-a') + (b-b') = 0 \end{cases},$$

dont la résolution amène à $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, c.-à-d. : $a = a'$ et $b = b'$. ∎

2. FORME CANONIQUE

2.1. Méthode de complétion au carré

Fixons nous un réel m. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$. Ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2mx = (x+m)^2 - m^2. \tag{1}$$

Dans le cas de $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2mx + p$, on remarque que l'on peut alors écrire

$$x^2 + 2mx + p = (x+m)^2 - m^2 + p. \tag{2}$$

Cette remarque fonde la *méthode de complétion au carré*.

Exemples

1. On souhaite résoudre l'équation $x^2 - 6x + 7 = 0$. On remarque que

$$x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 9 + 7$$

et on se ramène ainsi à

$$\begin{aligned}(x-3)^2-2&=0,\\(x-3)^2-(\sqrt{2})^2&=0,\end{aligned}$$

puis en employant une identité remarquable

$$(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})=0.$$

D'où l'on déduit que l'ensemble des solutions de $x^2-6x+7=0$ est

$$\mathcal{S}=\{3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\}.$$

2. Démontrer que x^2+x+1 est strictement positif pour tout $x\in\mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned}x^2+x+1&=x^2+2\times\frac{1}{2}x+1,\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1,\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$x^2+x+1\geq\frac{3}{4}.$$

On a donc finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1>0$.

2.2. Cas général

En factorisant a dans $P(x)$, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2
Soit P, la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=ax^2+bx+c$. On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right),\qquad(3)$$

où Δ, que l'on nomme discriminant *du polynôme $P(x)$, vaut $\Delta = b^2 - 4ac$.*

Démonstration

On commence par factoriser a dans $P(x)$:

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

puis on utilise l'égalité (2) avec $m = b/(2a)$ et $p = c/a$. On obtient

$$P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right).$$

Une réduction au même dénominateur amène alors au résultat annoncé. ■

Discriminant réduit

Dans le cas où b se met agréablement sous la forme $2b'$ (par exemple, lorsque b est un entier pair) on peut remarquer que $b/2a = b'/a$ et que $\Delta = 4b'^2 - 4ac$. On est alors amené à poser $\Delta' = b'^2 - ac$ et l'on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left(\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{\Delta'}{a^2}\right). \qquad (4)$$

Le nombre Δ' est souvent nommé *discriminant réduit*

Extrémums

La forme canonique de la fonction P met en évidence l'existence d'un extrémum dont la nature dépend du signe de a.

Théorème 3

Soit P, la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

La fonction P admet en $-\dfrac{b}{2a}$ $\begin{cases} \textit{un } \text{minimum } \textit{égal à } -\dfrac{\Delta}{4a} \textit{ si } a > 0, \\ \textit{un } \text{maximum } \textit{égal à } -\dfrac{\Delta}{4a} \textit{ si } a < 0. \end{cases}$

Démonstration
On voit tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,$$

donc que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2},$$

l'égalité n'étant atteinte que si le carré est nul, donc si $x = -b/(2a)$. On fait alors apparaître $P(x)$ (compte tenu de l'égalité (3) du théorème 2) en multipliant chaque membre de cette inégalité par $a \neq 0$, ce qui change ou non son sens, selon que a est positif ou négatif. Il vient alors :

- si $a > 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}\ ;$$
- et si $a < 0$,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

On sait de plus que dans les deux cas, l'égalité est atteinte si et seulement si $x = -b/(2a)$. ■

3. FACTORISATION

3.1. Théorème de factorisation

La méthode vue dans l'exemple 1 de la section 2.1 se généralise, pourvu que Δ soit positif. Précisément, on a le théorème

Théorème 4
Soit P, la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$. Si le discriminant Δ de P est positif ($\Delta \geq 0$), alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque. – Le cas où $\Delta = 0$ est particulier, puisque l'on a alors

$$\alpha = \beta = \frac{-b}{2a} \quad \text{soit :} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2.$$

Démonstration

On remarque que si $\Delta \geq 0$, on peut écrire

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2.$$

En reportant dans l'égalité (3) du théorème 2, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right).$$

On obtient alors le résultat annoncé en factorisant la différence de deux carrés grâce à l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. ■

3.2. Racines

Soit P une fonction polynôme du second degré. On dit que P est factorisable par $(x - x_0)$ s'il existe $m \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - x_0)(mx + p). \tag{5}$$

On dit qu'un réel x_0 est une racine de P si $P(x_0) = 0$: une racine de P n'est donc rien d'autre qu'une solution de l'équation $P(x) = 0$.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème qui suit :

Théorème 5

Soit P une fonction polynôme du second degré et $x_0 \in \mathbb{R}$. Le réel x_0 est une racine de P si et seulement si P est factorisable par $(x - x_0)$.

Démonstration

Tout d'abord, si P est factorisable par x_0, il suffit de calculer $P(x_0)$ en utilisant l'égalité (5) pour constater que $P(x_0) = 0$, donc que x_0 est une racine de P.

Réciproquement supposons que x_0 est une racine de P, donc que $P(x_0) = 0$. Soit alors a, b et c les coefficients de $P(x)$: on a

$$ax_0^2 + bx_0 + c = P(x_0) = 0,$$

d'où $c = -ax_0^2 - bx_0$. Et en substituant cette écriture de c dans l'expression de $P(x)$:

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= ax^2 + bx - ax_0^2 - bx_0, \\
&= a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0), \\
&= a(x - x_0)(x + x_0) + b(x - x_0), \\
&= (x - x_0)(ax + ax_0 + b).
\end{aligned}$$

On en arrive à $P(x) = (x - x_0)(mx + p)$, en prenant $m = a$ et $p = ax_0 + b$. ■

Racines et équation du second degré

Nous faisons ici le point sur les racines de P, autrement dit sur la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

• **Si $\Delta < 0$,** nous reprenons le théorème 3 : dans ce cas, la fonction P possède un minimum strictement positif si $a > 0$ ou un maximum strictement négatif si $a < 0$. Dans chaque cas, si $\Delta < 0$, l'équation $P(x) = 0$ ne possède pas de solution, autrement dit P n'admet aucune racine.

• **Si maintenant $\Delta = 0$,** la remarque qui suit le théorème 4 prouve que l'équation $P(x) = 0$ équivaut à

$$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = 0$$

et admet $-b/(2a)$ pour seule solution, ou encore que ce nombre est la seule racine de P. Dans la mesure où le facteur $x - (-b/(2a))$ intervient par son carré, on parle alors de *racine double*.

• **Enfin si $\Delta > 0$,** d'après le théorème 4, $P(x) = 0$ équivaut à $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$. Cette équation admet donc deux solutions, ou encore P admet deux racines qui sont

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque. – Dons le cas où l'on a posé $b = 2b'$ et utilisé le discriminant réduit Δ', il est facile de vérifier que les racines s'expriment comme suit :

$$\alpha = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Exemples

1. Résoudre l'équation $3x^2-5x+1 = 0$: calculons $\Delta = 25-12 = 13$. L'équation a deux solutions qui sont les racines de $3x^2-5x+1$:

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5-\sqrt{13}}{6}.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\alpha, \beta\}$.

2. Factoriser si possible $-2x^2+3x+2$: on calcule $\Delta = 9+16 = 5^2$. Il existe deux racines qui sont 2 et $-1/2$; d'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2x^2+3x+2 = -2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

3. Factoriser si possible $A(x) = 2x^2-8$: utilisons l'identité remarquable

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^2-8 = 2(x^2-4) = 2(x-2)(x+2).$$

Dans un cas de ce genre, il est bien sûr inutile de calculer Δ. En revanche, l'existence de deux racines distinctes nous prouve que $\Delta > 0$.

4. Résoudre l'équation $3x^2+2 = 0$. La fonction polynôme $x \mapsto 3x^2+2$ admet un minimum strictement positif égal à 2. Il n'y a aucune solution, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \varnothing$.

5. Factoriser $9x^2 - 6x + 1 = 0$. On pourrait envisager de calculer Δ, mais en observant l'expression, on reconnait un membre d'identité remarquable :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2.$$

6. Résoudre $x^2 + 2x = 0$. La factorisation est immédiate :

$$x^2 + 2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathscr{S} = \{0, -2\}$.

3.3. Problème de signe

Nous rappelons ici que la fonction *signe* est définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette définition est beaucoup plus pertinente que l'usage des symboles + et −, ne serait-ce que parce qu'elle rend exacte et claire une formulation comme *le signe du produit est le produit des signes.*

Théorème 6

Soit P, la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- *Si $\Delta < 0$, le signe de $P(x)$ est égal à celui de a en tout x réel.*
- *Si $\Delta = 0$, le signe de $P(x)$ est égal au signe de a en tout x réel différent de $-b/(2a)$ et s'annule en $-b/(2a)$.*
- *Si $\Delta > 0$, le signe de $P(x)$ est égal au signe de $-a$ en tout x intérieur à l'intervalle des racines, au signe de a en tout x extérieur à l'intervalle des racines et s'annule aux racines.*

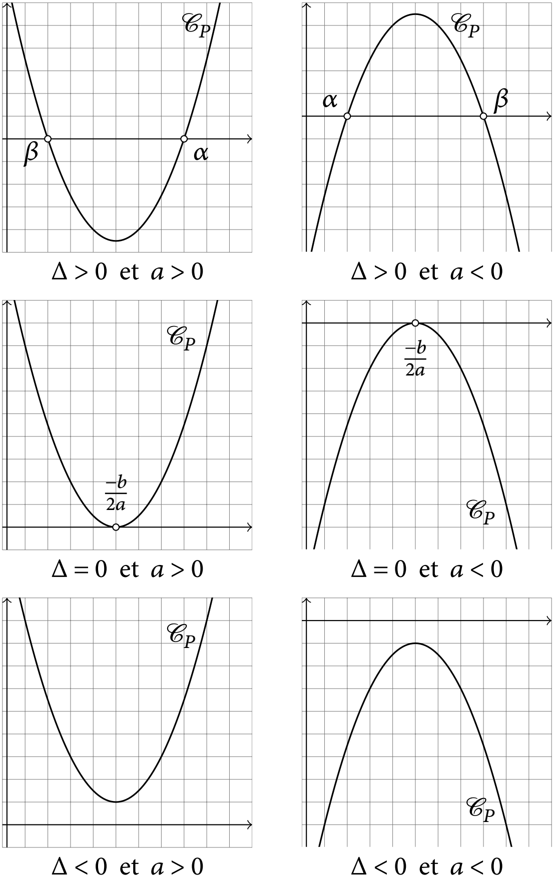

Figure 1

Ces résultats s'interprètent sur la représentation graphique $\mathscr{C}_P$ de P, selon les signes de Δ et a (voir figure 1).

Démonstration

Examinons successivement les trois cas du théorème.

• Si $\Delta < 0$, le résultat provient d'une remarque déjà faite : dans ce cas, la fonction P possède un minimum strictement positif si $a > 0$ ou un maximum strictement négatif si $a < 0$.

• Si $\Delta = 0$, on a

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le résultat annoncé se déduit du tableau de signes

x	$-\infty$		$-b/(2a)$		∞
$\operatorname{sgn}((x+\frac{b}{2a})^2)$		1	0	1	
$\operatorname{sgn}(P(x))$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

• Si $\Delta > 0$, on constate, en se référant à l'expression des racines α et β dans théorème 4, que α est la plus grande des deux racines si $a > 0$ et la plus petite si $a < 0$. En posant

$$\alpha' = \min(\alpha, \beta) \text{ et } \beta' = \max(\alpha, \beta),$$

on obtient

$$P(x) = a(x - \alpha')(x - \beta'), \quad \text{avec } \alpha' < \beta'.$$

On établit alors le tableau de signes

x	$-\infty$		α'		β'		∞
$\operatorname{sgn}(x-\alpha')$		-1	0	1	1	1	
$\operatorname{sgn}(x-\beta')$		-1	-1	-1	0	1	
$\operatorname{sgn}(P(x))$		$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(-a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$	

Le résultat annoncé s'en déduit. ∎

Exemples

1. Résoudre $x^2 - x - 6 \leq 0$: le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$. Il existe deux racines qui sont -2 et 3. On veut que $x^2 - x - 6$ soit négatif donc nul ou du signe de $-a$: cela se produit aux racines ou à l'intérieur de l'intervalle des racines. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = [-2, 3]$.

On aurait pu également, une fois les racines calculées, utiliser la forme factorisée du polynôme $P(x) = x^2 - x - 6$. Ainsi $P(x) = (x+2)(x-3)$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		∞
$\mathrm{sgn}(x+2)$		-1	0	1	1	1	
$\mathrm{sgn}(x-3)$		-1	-1	-1	0	1	
$\mathrm{sgn}(P(x))$		1	0	-1	0	1	

On retrouve la solution donnée par la première méthode.

2. Résoudre $(2x-6)^2 > 0$: ce carré est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ et s'annule si et seulement si $x = 3$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Si l'on avait eu la très mauvaise idée de développer pour calculer le discriminant, on aurait trouvé $\Delta = 0$ et une racine double égale à 3.

3. Résoudre $3x^2 - 4x - 1 \geq 0$: c'est l'occasion d'utiliser le discriminant réduit.

On trouve $\Delta' = 4 + 3 = 7$. Il existe deux racines :

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2-\sqrt{7}}{3}.$$

On veut que $3x^2 - 4x - 1$ soit positif, donc nul ou du signe de a : cela se produit aux racines ou à l'extérieur de l'intervalle des racines. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, \beta\right] \cup \left[\alpha, \infty\right[.$$

4. Résoudre $5x - 2x^2 > 0$. La factorisation se fait à vue :

$$5x - 2x^2 = -2x\left(x - \frac{5}{2}\right),$$

il y a donc deux racines : $\alpha = 0$ et $\beta = 5/2$.

On peut ensuite soit faire un tableau de signes, soit utiliser le théorème 6, ce que nous ferons ici. On veut que $5x - 2x^2$

soit strictement positif, donc du signe de $-a$: cela se produit si et seulement si x est à l'intérieur de l'intervalle des racines. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]0, 5/2[$.

5. Résoudre $x^2 - x + 1 > 0$: on trouve $\Delta = -3$. Il n'y a pas de racines, donc $x^2 - x + 1$ admet pour signe 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tout x réel est donc solution : l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

4. SOMME ET PRODUIT DES RACINES

4.1. Expression de la somme et du produit des racines

On suppose ici que $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire que le polynôme P deux racines α et β, confondues en une racine double au cas où $\Delta = 0$. On a le théorème suivant :

Théorème 7

Soit P, la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$. Si le discriminant Δ de P est positif, la somme et le produit des racines de P sont données par

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Remarque. – On sait que si $\Delta = 0$, on a $\alpha = \beta = -b/(2a)$. On retrouve bien

$$\alpha + \beta = 2 \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a} ;$$

on remarque également que, puisque $\Delta = 0$, on a $b^2 = 4ac$ et par conséquent

$$\alpha\beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Démonstration

On utilise la forme factorisée de $P(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) &= a(x-\alpha)(x-\beta),\\ &= a(x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta),\\ &= a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right),\\ &= ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta.\end{aligned}$$

D'après le théorème 1, on peut identifier les coefficients : $-a(\alpha+\beta) = b$ et $a\alpha\beta = c$. Le résultat annoncé en découle immédiatement. ■

Racine apparente ou connue

On dit que α est une « racine apparente » (on dit également « évidente ») du polynôme P lorsqu'un simple calcul à vue permet de montrer que $P(\alpha) = 0$. On parle de racine connue lorsqu'un calcul antérieur a permis d'établir cette égalité. Dans une telle situation, il est facile de déterminer β, l'autre racine de P, grâce à la somme ou au produit :

$$\beta = -\frac{b}{a} - \alpha \quad \text{ou (dans le cas où } \alpha \neq 0) \quad \beta = \frac{c}{a\alpha}.$$

Exemples

1. Factoriser le polynôme P, défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 9x + 6$. Un calcul immédiat montre que $P(-1) = 0$: le réel -1 est donc racine de P, tandis que l'autre racine β vérifie $-1 \times \beta = 6/3 = 2$. D'où $\beta = -2$ et la factorisation :

$$P(x) = 3(x+1)(x+2).$$

2. On pose $Q(x) = 2x^2 - 13x + 15$. Calculer $Q(5)$ et résoudre l'équation $Q(x) = 0$. On trouve $Q(5) = 0$: le réel 5 est donc racine de Q. L'autre racine vérifie $5 + \beta = 6{,}5$, d'où $\beta = 1{,}5$: l'ensemble des solutions de l'équation proposée est

$$\mathcal{S} = \left\{5, \frac{3}{2}\right\}.$$

4.2. Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Théorème 8

Deux réels s et p étant donnés, il existe deux nombres réels α et β dont la somme vaut s et le produit p si et seulement si le nombre $\Delta = s^2 - 4p$ est positif. Dans ce cas, les nombres α et β sont les racines de la fonction polynôme de degré 2 définie par $P(x) = x^2 - sx + p$, de discriminant Δ.

Démonstration

• Tout d'abord, si $s^2 - 4p \geq 0$, la fonction polynôme P, de discriminant $\Delta = s^2 - 4p$ admet deux racines dont la somme est s et le produit p d'après le théorème 7.

• Réciproquement, s'il existe deux nombres α et β tels que

$$\alpha + \beta = s \quad \text{et} \quad \alpha\beta = p,$$

on a, d'après la première équation, $\beta = s - \alpha$, puis en substituant dans la seconde

$$\alpha(s - \alpha) = p \quad \text{soit} \quad \alpha^2 - s\alpha + p = 0,$$

c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.

Il est donc nécessaire que α soit une racine de P, ce qui entraîne que le discriminant $s^2 - 4p$ soit positif. Enfin, la relation $\beta = s - \alpha$ entraîne que β est alors la seconde racine de P. ■

Exemples

1. Trouver deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit -12. Ces deux nombres doivent être racines de $x^2 + x - 12$ dont le discriminant est 49 et qui admet -3 et 4 pour racines. Les deux nombres cherchés sont donc -3 et 4.

2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 6 et le produit 9. On forme le polynôme $x^2 - 6x + 9$, égal à $(x-3)^2$, dont le discriminant est nul et qui admet 3 pour racine double :

les nombres α et β dont le produit vaut 9 et la somme 6 sont tous deux égaux à 3.

3. Trouver deux nombres dont la somme vaut $s = 5$ et le produit $p = 8$. On calcule $s^2 - 4p = -7$: le problème n'a pas de solution (tout comme le polynôme $x^2 - 5x + 8$ n'admet pas de racines).